

ДЕЯКІ РЕКОМЕНДАЦІЇ ЩОДО ОБҐРУНТУВАННЯ СТЕРЕОМЕТРИЧНИХ ЗАДАЧ НА ЗНО

С. І. Голобородько, Л. В. Корнілець, м. Харків

Незабаром (22 травня) випускники шкіл складатимуть ЗНО з математики, одне із завдань якого — стереометрична задача з розгорнутою відповіддю. Як свідчить досвід, у більшості учнів недостатньо сформовані вміння обґрунтовувати розв'язання стереометричних задач. Зважаючи на те, що зараз учні 11 класів повторюють вивчений матеріал за курс школи та активно готуються до складання ДПА і ЗНО, доречно зупинитися на вдосконаленні їхніх умінь розв'язувати стереометричні задачі відкритої форми з розгорнутою відповіддю. Сподіваємося, що пропонована стаття допоможе вчителям організувати роботу з учнями під час підготовки до складання ДПА і ЗНО.

Очевидно, що для того щоб розв'язувати ням, учням потрібно добре знати відповідний стереометричні задачі з повним обґрунтуван- теоретичний матеріал (див. табл. 1).

Таблиця 1

Взаємне розташування	Означення	Ознака	Властивості
Паралельні прямі	Дві прямі, що лежать в одній площині і не мають спільних точок, називають паралельними	Дві прямі, паралельні третій прямій, паралельні	
Мимобіжні прямі	Дві прямі, що не мають спільних точок, називають мимобіжними	Якщо одна з двох прямих лежить у площині, а інша перетинає цю площину в точці, що не належить першій прямій, то ці прямі мимобіжні	
Пряма, паралельна площині	Пряму і площину називають паралельними, якщо вони не мають спільних точок	Якщо пряма, що не лежить у площині, паралельна якій-небудь прямій, що лежить у цій площині, то вона паралельна цій площині	Якщо площина проходить через пряму, паралельну іншій площині, і перетинає цю площину, то пряма перетину площин паралельна цій прямій
Паралельні площини	Дві площини називають паралельними, якщо вони не мають спільних точок	Якщо дві прямі, що перетинаються, однієї площини відповідно паралельні двом прямим, що перетинаються, іншої площини, то ці площини паралельні	1. Якщо дві паралельні площини перетинаються третьою площиною, то прямі перетину паралельні. 2. Відрізки паралельних прямих, що містяться між двома паралельними площинами, паралельні. 3. Якщо пряма перетинає одну із двох паралельних площин, то вона перетинає і другу площину

Взаємне розташування	Означення	Ознака	Властивості
Пряма, перпендикулярна до площини	Пряму, що перетинає площину, називають перпендикулярною до площини, якщо вона перпендикулярна до будь-якої прямої цієї площини і проходить через точку перетину прямої і площини	Якщо пряма перпендикулярна до двох прямих, що перетинаються і лежать у цій площині, то вона перпендикулярна до цієї площини	1. Якщо площина перпендикулярна до однієї з двох паралельних прямих, то вона перпендикулярна і до іншої прямої. 2. Дві прямі, перпендикулярні до однієї й тієї самої площини, паралельні. 3. Якщо пряма перпендикулярна до однієї з двох паралельних площин, то вона перпендикулярна й до другої. 4. Дві різні площини, перпендикулярні до однієї й тієї самої прямої, паралельні
Перпендикулярні площини	Дві площини, що перетинаються, називають перпендикулярними, якщо третя площина, перпендикулярна до прямої перетину цих площин, перетинає їх по перпендикулярних прямих	Якщо площина проходить через пряму, перпендикулярну до іншої площини, то ці площини перпендикулярні	Якщо пряма, що лежить в одній із двох перпендикулярних площин, перпендикулярна до лінії їх перетину, то вона перпендикулярна й до іншої площини

СТРУКТУРА РОЗВ'ЯЗАННЯ СТЕРЕОМЕТРИЧНОЇ ЗАДАЧІ З РОЗГОРНУТОЮ ВІДПОВІДДЮ

1. Описова частина. Описуємо умови задачі, що не потребують обґрунтування.
2. Обґрунтування ключових моментів розв'язання.
3. Обчислювальна частина. Безпосередньо знаходимо величину, що вимагається в задачі.

Що передбачає розв'язання стереометричної задачі відкритої форми з розгорнутою відповіддю (тобто, що обов'язково пояснюємо і обґрунтовуємо під час розв'язування задачі)?

1. Обґрунтування побудови перерізу, якщо заданий в умові переріз, паралельний деякій прямій, або деякій площині, або перпендикулярний до прямої, або перпендикулярний до площини тощо. Обґрунтування форми перерізу.

2. Обґрунтування:

- ✓ кута між мимобіжними прямими;
- ✓ кута між прямою та площиною;
- ✓ лінійного кута двогранного кута.

3. Обґрунтування відстані між:

- ✓ точкою та прямою;
- ✓ точкою та площиною;
- ✓ паралельними прямими;
- ✓ паралельними прямою і площиною;
- ✓ паралельними площинами.

4. Обґрунтування розташування висоти піраміди.

5. Обґрунтування побудови шуканої в умові величини (наприклад, радіус вписаного кола тощо).

Коментар. Отже, учні повинні добре знати відповідні означення (див. табл. 2). Нагадуємо учням, щоб безпомилково побудувати елемент, заданий в умові, потрібно від поняття перейти до означення.

Таблиця 2

Поняття	Означення
Відстань від точки до прямої	Відстанню від точки до прямої називають довжину перпендикуляра, проведеного з цієї точки до цієї прямої
Відстань від точки до площини	Відстанню від точки до площини називають довжину перпендикуляра, проведеного з цієї точки до цієї площини
Відстань між паралельними прямими	Відстанню між паралельними прямими називають відстань від будь-якої точки однієї прямої до іншої прямої
Відстань між паралельними прямою та площиною	Відстанню від прямої до паралельної їй площини називають відстань від будь-якої точки цієї прямої до площини
Відстань між паралельними площинами	Відстанню між паралельними площинами називають відстань від будь-якої точки однієї площини до іншої площини
Кут між мимобіжними прямими	Кутом між мимобіжними прямими називають кут між прямими, що перетинаються і паралельні двом заданим мимобіжним прямим
Кут між прямою та площиною	Кутом між прямою та площиною називають кут між прямою та її проекцією на цю площину
Двогранний кут. Лінійний кут двогранного кута	Двогранним кутом називають фігуру, утворену двома півплощинами зі спільною прямою, що їх обмежує. Лінійним кутом двогранного кута називають кут між променями, по яких площина, перпендикулярна до ребра двогранного кута, перетинає його грані

На особливу увагу заслуговують задачі з пірамідою, оскільки під час розв'язування потрібно обґрунтовувати розташування висоти піраміди (або її основи).

У правильній піраміді вважаємо, що розташування висоти відоме.

Коментар. Учні повинні вміти зображувати правильні трикутну і чотирикутну піраміди.

Для розв'язування задач із пірамідою важливими є наведені твердження.

Твердження 1. Якщо всі бічні ребра піраміди рівні або утворюють рівні кути з основою, або утворюють рівні кути з висотою, то основа висоти піраміди є центром кола, описаного навколо основи піраміди.

Твердження 2. Якщо всі бічні грані нахилені до основи піраміди під рівними кутами або висоти бічних граней рівні, або висоти піраміди утворюють рівні кути з бічними гранями, то основа висоти піраміди є центром кола, вписаного в основу піраміди.

Якщо всі бічні грані піраміди нахилені до її основи під кутом α , то площу бічної поверхні піраміди можна обчислити за формулою

$$S_{\text{бічн.}} = \frac{S_{\text{осн.}}}{\cos \alpha}, \text{ де } S_{\text{осн.}} \text{ — площа основи піраміди.}$$

Коментар. Оскільки використання цих тверджень для розв'язання задач передбачає знання учнями розташування центра описаного та вписаного кіл, то доцільно ще раз повторити, що таке центр описаного, вписаного кіл, де розташовані центри у випадку конкретних фігур, чому дорівнюють їх радіуси.

Нагадуємо учням, що центр описаного кола навколо многокутника — точка перетину серединних перпендикулярів до його сторін. Радіус описаного кола — відрізок, що сполучає центр кола з вершиною многокутника.

Центр вписаного в многокутник кола — точка перетину бісектрис кутів многокутника. Радіус вписаного кола — довжина перпендикуляра, проведеного з центра кола до сторони многокутника.

Ці відомості можна систематизувати в таблицях 3, 4.

Таблиця 3

Фігура	Розташування центра описаного кола	Формули для визначення радіуса R описаного кола	Формули для знаходження площі многокутника
Рівно-сторонній трикутник	Точка перетину медіан (або висот, або бісектрис)	$R = \frac{a}{\sqrt{3}}$	$S = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$, де a — сторона трикутника
Квадрат	Точка перетину діагоналей	$R = \frac{a\sqrt{2}}{2}$	$S = a^2$, $S = \frac{1}{2}d^2$, де a і d — сторона і діагональ квадрата відповідно
Прямокутний трикутник	Середина гіпотенузи	$R = \frac{\text{гіпотенуза}}{2}$	$S = \frac{1}{2}ab$, де a і b — катети трикутника; $S = \frac{1}{2}ch$, де c і h — гіпотенуза і висота, проведена до неї, відповідно
Рівнобедрений трикутник	Лежить на медіані (висоті, бісектрисі), проведений до основи трикутника	$R = \frac{b}{2\sin\alpha}$, α — кут, протилежний до сторони b	$S = \frac{1}{2}a^2\sin\alpha$, $S = \frac{1}{2}bh$, де a — бічна сторона трикутника, α — кут між бічними сторонами, b — основа трикутника, h — висота, проведена до неї
Довільний трикутник	Точка перетину серединних перпендикулярів (може лежати поза трикутником у випадку, якщо він тупокутний)	$R = \frac{abc}{4S}$, $R = \frac{b}{2\sin\alpha}$, де a , b , c — сторони трикутника, α — кут, протилежний до сторони b	$S = \frac{1}{2}abs\sin\alpha$, $S = \frac{1}{2}ah$, $S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$, де a , b , c — сторони трикутника, α — кут між сторонами a і b , h — висота, проведена до сторони a
Прямокутник	Точка перетину діагоналей прямокутника	Дорівнює половині діагоналі прямокутника, або $R = \frac{\sqrt{a^2+b^2}}{2}$, де a і b — сторони прямокутника	$S = ab$, $S = \frac{1}{2}d^2\sin\alpha$, де d — діагональ прямокутника, α — кут між діагоналями
Рівнобічна трапеція	Описати коло можна тільки навколо рівнобічної трапеції. Центр кола лежить на прямій, що сполучає середини основ трапеції	Радіус описаного кола навколо трапеції $ABCD$ дорівнює радіусу кола, описаного навколо трикутника ABD	$S = \frac{a+b}{2} \cdot h$, де a і b — основи трапеції, h — її висота

Таблиця 4

Фігура	Розташування центра вписаного кола	Формули для визначення радіуса r вписаного кола	Формули для знаходження площі многокутника
Рівно-сторонній трикутник	Точка перетину медіан (або висот, або бісектрис)	$r = \frac{a}{2\sqrt{3}}$	$S = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$, де a — сторона трикутника
Квадрат	Точка перетину діагоналей	$r = \frac{a}{2}$	$S = a^2$, $S = \frac{1}{2}d^2$, де a і d — сторона і діагональ квадрата відповідно
Прямокутний трикутник	Точка перетину бісектрис трикутника	$r = \frac{a+b-c}{2}$	$S = \frac{1}{2}ab$, де a і b — катети трикутника; $S = \frac{1}{2}ch$, де c і h — гіпотенуза і висота, проведена до неї, відповідно
Рівнобедрений трикутник	Лежить на медіані (висоті, бісектрисі), проведений до основи трикутника	$r = \frac{2S}{P}$, P і S — периметр і площа трикутника відповідно	$S = \frac{1}{2}a^2 \sin \alpha$, $S = \frac{1}{2}bh$, де a — бічна сторона трикутника, α — кут між бічними сторонами, b — основа трикутника, h — висота, проведена до неї
Довільний трикутник	Точка перетину бісектрис трикутника	$r = \frac{2S}{P}$, P і S — периметр і площа трикутника відповідно	$S = \frac{1}{2}ab \sin \alpha$, $S = \frac{1}{2}ah$, $S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$, де a, b, c — сторони трикутника, α — кут між сторонами a і b , h — висота, проведена до сторони a
Ромб	Точка перетину діагоналей ромба	Дорівнює половині висоті ромба	$S = ah$, $S = \frac{1}{2}d_1d_2$, де a, h, d_1 і d_2 — сторона, висота, діагоналі ромба відповідно
Трапеція	Вписати коло можна тільки в трапецію за умови, якщо сума основ дорівнює сумі бічних сторін трапеції	Дорівнює половині висоти трапеції	$S = \frac{a+b}{2} \cdot h$, де a і b — основи трапеції, h — її висота

Твердження 3. Якщо дві суміжні бічні грані піраміди перпендикулярні до її основи, то їх спільне ребро є висотою піраміди.

Твердження 4. Якщо бічна грань піраміди перпендикулярна до її основи, то висота піраміди належить цій грані.

Коментар. Залежно від умови задачі, потрібно детальніше описати розташування висоти. Наведемо приклад.

Нехай задана чотирикутна піраміда $SABCD$, в основі якої лежить ромб і бічна грань SBC — рівнобедрений трикутник, причому $(SBC) \perp (ABC)$. Обґрунтуйте кут між гранями SAD і ABC .

Проведемо $ON \perp AD$, тоді за теоремою про три перпендикуляри $SN \perp AD$. Отже, $\angle SNO$ — лінійний кут двогранного кута при ребрі AD .

Твердження 5. Якщо бічна грань трикутної піраміди перпендикулярна до її основи, а дві інші нахилені до основи під рівними кутами, то основа висоти піраміди є точкою перетину бісектриси кута основи, протилежного до перпендикулярної грані, із цією гранню.

від умови) такі сталі вирази: «Оскільки всі ребра піраміди рівні, або..., то основа висоти — центр описаного кола навколо ... Тоді, оскільки за умовою, основа піраміди — (конкретизуємо)..., то основа висоти — (конкретизуємо, де розташована) і радіус описаного кола дорівнює...»; «Оскільки дві бічні грані піраміди перпендикулярні до її основи, то їх спільне ребро є висотою піраміди»; тощо.

Задача 1 (ЗНО 2009)

Розв'язання

[illegible]

Твірна PA — похила до площини основи, OA — її проекція на цю площину. Тоді за означенням кута між прямою та площиною кут PAO — кут нахилу твірної PA до площини основи конуса. За умовою $\angle PAO = \alpha$.

Проведемо $OC \perp AB$, тоді за теоремою про три перпендикуляри $PC \perp AB$.

Проведемо $OK \perp PC$. Доведемо, що $OK \perp (PAB)$.

Оскільки $AB \perp OC$, $AB \perp PC$, то за ознакою перпендикулярності прямої та площини $AB \perp (POC)$. Площина PAB проходить через пряму AB , перпендикулярну до площини (POC) , тоді за ознакою перпендикулярності площин $(POC) \perp (PAB)$. Ці площини перетинаються по прямій PC . Оскільки пряма OK лежить у площині (POC) і $OK \perp PC$, то за властивістю перпендикулярних площин $OK \perp PC$. Тоді відрізок PK — проекція висоти OP на площину (PAB) . Отже, за означенням кута між прямою та площиною, кут OPK — кут, що утворює висота конуса з площиною перерізу. За умовою $\angle OPK = \varphi$.

$$S_{PAB} = \frac{1}{2} \cdot AB \cdot PC = AC \cdot PC$$

(оскільки трикутник OAB — рівнобедрений із основою AB і OC — його висота, то OC — медіана цього трикутника).

Із прямокутного трикутника POA маємо: $PO = OA \operatorname{tg} PAO = R \operatorname{tg} \alpha$.

Із прямокутного трикутника POC маємо:

$$PC = \frac{PO}{\cos OPC} = \frac{R \operatorname{tg} \alpha}{\cos \varphi},$$

$$OC = PO \operatorname{tg} OPC = R \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \varphi.$$

Із прямокутного трикутника OAC за теоремою Піфагора маємо:

$$\begin{aligned} AC &= \sqrt{OA^2 - OC^2} = \sqrt{R^2 - R^2 \operatorname{tg}^2 \alpha \operatorname{tg}^2 \varphi} = \\ &= R \sqrt{1 - \operatorname{tg}^2 \alpha \operatorname{tg}^2 \varphi}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} S_{PAB} &= R \sqrt{1 - \operatorname{tg}^2 \alpha \operatorname{tg}^2 \varphi} \cdot \frac{R \operatorname{tg} \alpha}{\cos \varphi} = \\ &= \frac{R^2 \operatorname{tg} \alpha \sqrt{1 - \operatorname{tg}^2 \alpha \operatorname{tg}^2 \varphi}}{\cos \varphi}. \end{aligned}$$

$$\text{Відповідь. } \frac{R^2 \operatorname{tg} \alpha \sqrt{1 - \operatorname{tg}^2 \alpha \operatorname{tg}^2 \varphi}}{\cos \varphi}.$$

Задача 2 (ЗНО 2010, 1 сесія)

Основою піраміди є ромб, гострий кут якого дорівнює 30° . Усі бічні грані піраміди нахилені до площини її основи під кутом 60° . Знайдіть площу бічної поверхні піраміди (у см^2), якщо радіус кола, вписаного в її основу, дорівнює 3 см.

Коментар. Для розв'язання задачі скористаємося тим фактом, що площу бічної поверхні піраміди, усі бічні грані якої нахилені до площини основи під кутом α , можна знайти за формулою $S_{\text{бічн.}} = \frac{S_{\text{осн.}}}{\cos \alpha}$. Отже, для розв'язання задачі не обов'язково рисувати піраміду. Нам потрібно знайти площу ромба за її гострим кутом і радіусом кола, вписаного в ромб.

Розв'язання

Оскільки висота ромба вдвічі більша за радіус кола, вписаного в ромб, то висота ромба дорівнює 6 см. За гострим кутом 30° ромба і його висотою 6 см можна знайти сторону ромба. Сторона ромба дорівнює

$$\frac{6}{\sin 30^\circ} = 12 \text{ см.}$$

Площа ромба дорівнює

$$12^2 \sin 30^\circ = 72 \text{ (см}^2\text{)}.$$

Площа бічної поверхні ромба дорівнює

$$S_{\text{бічн.}} = \frac{72}{\cos 60^\circ} = 144 \text{ (см}^2\text{)}.$$

Відповідь. 144 см^2 .

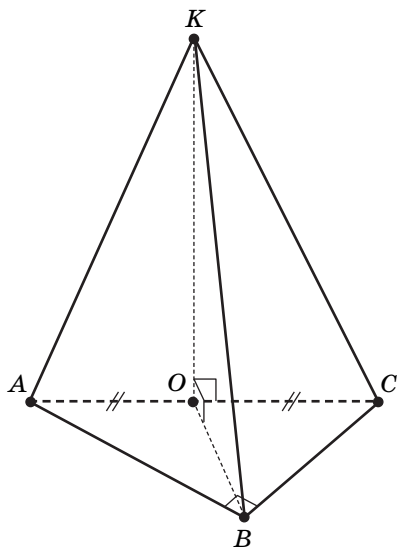
Задача 3 (ЗНО 2010, 2 сесія)

Основою піраміди є прямокутний трикутник, гіпотенуза якого дорівнює $4\sqrt{3}$ см, гострий кут — 30° . Усі бічні ребра піраміди нахилені до площини її основи під кутом 45° . Знайдіть об'єм піраміди.

Розв'язання

На рисунку зображена піраміда, в основі якої лежить прямокутний трикутник ABC , у якому гіпотенуза AC дорівнює $4\sqrt{3}$ см, гострий кут A дорівнює 30° .

Оскільки всі бічні ребра піраміди нахилені до площини її основи під рівними кутами, то основа висоти піраміди — точка O — центр описаного навколо трикутника кола, тобто точка O — середина гіпотенузи AC . Проведемо висоту KO піраміди, тоді AK — похила до площини основи, AO — її проекція на цю площину. За означенням кута між прямою та площиною, кут KAO — кут нахилу бічного ребра до площини основи. За умовою $\angle KAO = 45^\circ$.



Об'єм піраміди обчислимо за формулою $V = \frac{1}{3}SH$, де S — площа основи піраміди, H — її висота.

Оскільки точка O — середина гіпотенузи, то $AO = \frac{1}{2}AC = 2\sqrt{3}$ (см).

Із прямокутного трикутника AOK маємо:

$$KO = AO \operatorname{tg} 45^\circ = 2\sqrt{3} \text{ (см)}.$$

Із прямокутного трикутника ABC маємо:

$$AB = AC \cos A = 4\sqrt{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 6 \text{ (см)}.$$

$$S_{ABC} = \frac{1}{2}AC \cdot AB \cdot \sin 30^\circ = \frac{1}{2} \cdot 4\sqrt{3} \cdot 6 \cdot \frac{1}{2} = 6\sqrt{3} \text{ (см}^2\text{)}.$$

$$V = \frac{1}{3} \cdot 6\sqrt{3} \cdot 2\sqrt{3} = 12 \text{ (см}^3\text{)}.$$

Відповідь. 12 см³.

Задача 4 (ЗНО 2011)

У чотирикутну піраміду, в основі якої лежить рівнобічна трапеція з бічною стороною 13 см і основами 18 см і 8 см, вписано конус. Знайдіть площу бічної поверхні конуса $S_{\text{бічн.}}$, якщо всі бічні грані піраміди нахилені до площини основи під кутом 60° . У відповіді запишіть значення $\frac{S_{\text{бічн.}}}{\pi}$.

Розв'язання

На рисунку зображена піраміда, в основі якої лежить рівнобічна трапеція $ABCD$ з основами $AD=18$ см, $BC=8$ см і бічною стороною $AB=13$ см.

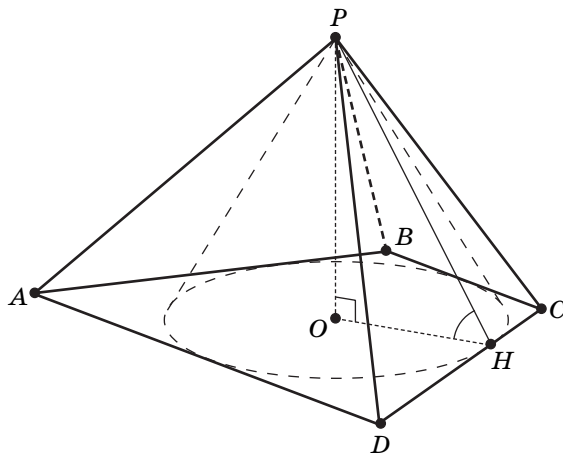
Проведемо $PO \perp (ABC)$.

Оскільки всі бічні грані піраміди нахилені до площини основи під кутом 60° , то основа висоти піраміди — точка O — центр вписаного в трапецію кола. Точка O — середина відрізка, що сполучає середини основ трапеції. Радіус вписаного кола дорівнює половині висоти трапеції.

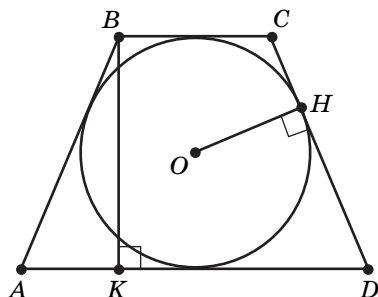
Проведемо $OH \perp CD$, тоді за теоремою про три перпендикуляри $PH \perp CD$. Отже, $\angle PHO$ — лінійний кут двогранного кута при ребрі CD , тобто лінійний кут кута, утвореного бічною гранню і площиною основи. За умовою $\angle PHO = 60^\circ$.

OH — радіус кола, вписаного в трапецію, є радіусом основи вписаного в піраміду конуса, PH — його твірна.

Площу бічної поверхні конуса обчислимо за формулою $S_{\text{бічн.}} = \pi Rl$, де $R = OH$, $l = PH$.



Зобразимо основу піраміди — рівнобічну трапецію $ABCD$.



Проведемо висоту BK трапеції. Оскільки за умовою трапеція $ABCD$ рівнобічна, то

$$AK = \frac{1}{2}(AD - BC) = \frac{18 - 8}{2} = 5 \text{ (см)}.$$

Із прямокутного трикутника ABK маємо:

$$BK = \sqrt{AB^2 - AK^2} = \sqrt{13^2 - 5^2} = 12 \text{ (см)}.$$

Тоді $OH = \frac{1}{2}BK = \frac{1}{2} \cdot 12 = 6 \text{ (см)}.$

Із прямокутного трикутника POH маємо:

$$PH = \frac{OH}{\cos PHO} = \frac{6}{\cos 60^\circ} = 12 \text{ (см)}.$$

$$S_{\text{бічн.}} = \pi \cdot 6 \cdot 12 = 72\pi \text{ (см}^2\text{)}.$$

Відповідь. 72 см^2 .

Задача 5 (ЗНО 2012, 1 сесія)

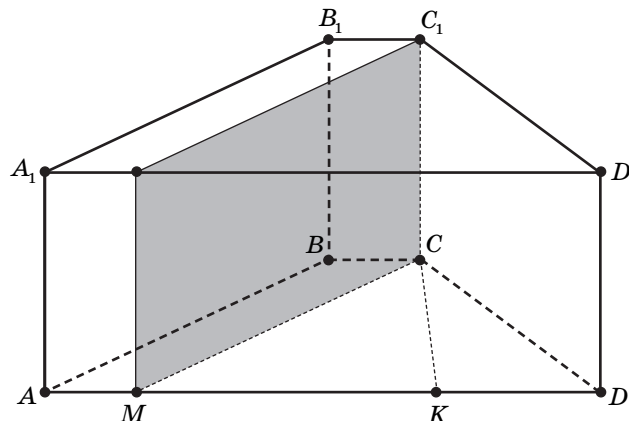
Основою прямої призми $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ є рівнобічна трапеція $ABCD$. Основа AD трапеції дорівнює висоті трапеції і в шість разів більша за основу BC . Через бічне ребро CC_1 призми проведено площину, паралельну ребру AB . Знайдіть площу утвореного перерізу (у см^2), якщо об'єм призми дорівнює 672 см^3 , а її висота — 8 см .

Розв'язання

На рисунку зображена пряма призма $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$, в основі якої лежить рівнобічна трапеція $ABCD$, основа AD якої дорівнює висоті трапеції, причому $AD = 6BC$.

Побудуємо переріз призми площиною, що проходить через бічне ребро CC_1 паралельно ребру AB . Проведемо $CM \parallel AB$, тоді за ознакою паралельності прямої та площини

$AB \parallel (MCM_1)$. Прямокутник $CC_1 M_1 M$ є перерізом призми цією площиною.



Об'єм призми обчислимо за формулою $V = SH$, де $S = S_{ABCD}$, $H = AA_1$ (оскільки призма пряма), тобто $V = S_{ABCD} \cdot AA_1$, звідси

$$S_{ABCD} = \frac{V}{AA_1} = \frac{672}{8} = 84 \text{ (см}^2\text{)}.$$

За умовою $AD = CK = 6BC$, де CK — висота трапеції.

Тоді

$$S_{ABCD} = \frac{BC + AD}{2} \cdot CK = \frac{BC + 6BC}{2} \cdot 6BC = 21BC^2;$$

$21BC^2 = 84$, звідки $BC = 2 \text{ см}$; $AD = 6 \cdot 2 = 12 \text{ (см)}$.

Маємо: $KD = \frac{AD - BC}{2} = \frac{12 - 2}{2} = 5 \text{ (см)}$. Із прямокутного трикутника CKD :

$$CD = \sqrt{CK^2 + KD^2} = \sqrt{12^2 + 5^2} = 13 \text{ (см)}.$$

Оскільки $AB \parallel MC$, $AM \parallel BC$, то $ABCM$ — паралелограм. Отже, $AB = MC = 13 \text{ см}$. Тоді

$$S_{CC_1 M_1 M} = MC \cdot CC_1 = 13 \cdot 8 = 104 \text{ (см}^2\text{)}.$$

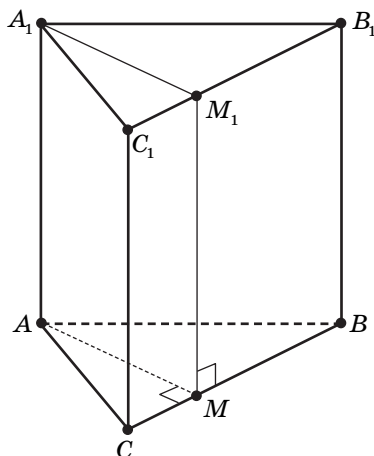
Відповідь. 104 .

Задача 6 (ЗНО 2012, 2 сесія)

Основою прямої трикутної призми $ABCA_1 B_1 C_1$ є рівнобедрений трикутник ABC , де $AB = BC = 25 \text{ см}$, $AC = 30 \text{ см}$. Через бічне ребро AA_1 призми проведено площину, перпендикулярну до ребра BC . Визначте об'єм призми (у см^3), якщо площа утвореного перерізу дорівнює 72 см^2 .

Розв'язання

На рисунку зображена пряма призма, в основі якої лежить рівнобедрений трикутник ABC , у якому $AB = BC = 25$ см, $AC = 30$ см.



Проведемо $AM \perp BC$. У грані CC_1B_1B проведемо $MM_1 \parallel CC_1$. Оскільки призма пряма, то $MM_1 \perp (ABC)$, тоді за означенням перпендикулярності прямої та площини $MM_1 \perp BC$.

Маємо: $BC \perp AM$, $BC \perp MM_1$, тоді за ознакою перпендикулярності прямої та площини $BC \perp (A_1M)$. Маємо: AMM_1A_1 — шуканий переріз, причому AMM_1A_1 — прямокутник.

Об'єм призми обчислимо за формулою $V = SH$, де $S = S_{ABC}$, $H = AA_1$. $S_{ABC} = \frac{1}{2} BC \cdot AM$, звідки $AM = \frac{2S_{ABC}}{BC}$.

Площа перерізу AMM_1A_1 дорівнює $AM \cdot AA_1$.

Маємо: $S_{AMM_1A_1} = \frac{2S_{ABC} \cdot AA_1}{BC} = \frac{2V}{BC}$, звідки

$$V = \frac{S_{AMM_1A_1} \cdot BC}{2} = \frac{72 \cdot 25}{2} = 900 \text{ (см}^3\text{)}.$$

Відповідь. 900 см³.

Задача 7 (ЗНО 2013, 1 сесія)

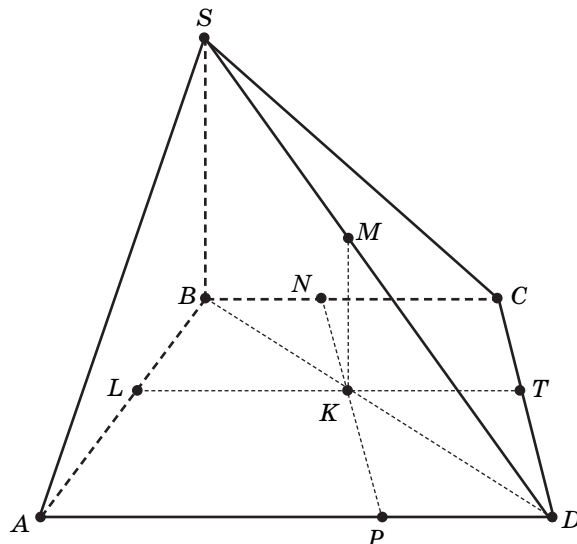
Основою піраміди $SABCD$ є трапеція $ABCD$ ($AD \parallel BC$), довжина середньої лінії якої дорівнює 5 см. Бічне ребро SB перпендикулярне до площини основи піраміди і вдвічі більше від середньої лінії трапеції $ABCD$. Знайдіть відстань від середини ребра

SD до площини SBC (у см), якщо об'єм піраміди дорівнює 210 см³.

Розв'язання

На рисунку зображена піраміда, в основі якої лежить трапеція $ABCD$ з основами AD і BC . Середня лінія LT трапеції дорівнює 5 см. Бічне ребро SB перпендикулярне до площини основи і $SB = 10$ см.

Оскільки $SB \perp (ABC)$, то $(SBC) \perp (ABC)$.



Нехай точка M — середина ребра SD .

Проведемо $MK \perp (ABC)$, тоді $MK \parallel SB$ і MK — середня лінія трикутника SBD , тобто точка K — середина діагоналі BD . Отже, точка $K \in LT$.

Проведемо $KN \perp BC$, тоді за властивістю перпендикулярних площин $NK \perp (SBC)$.

Оскільки $MK \parallel SB$, то за ознакою паралельності прямої та площини $MK \parallel (SBC)$.

За означенням відстані між паралельними прямою та площиною KN — відстань від прямої MK до площини (SBC) , а отже, від точки M до площини (SBC) .

KN — шукана відстань.

Нехай NP — висота трапеції, тоді $NK = KP$ (середня лінія трапеції ділить її висоту навпіл). За умовою $LT = 5$ см, $SB = 2LT = 2 \cdot 5 = 10$ (см).

Оскільки об'єм піраміди $V = \frac{1}{3} S_{ABCD} \cdot SB$, то

$$S_{ABCD} = \frac{3V}{SB} = \frac{3 \cdot 210}{10} = 63 \text{ (см}^2\text{)}.$$

$$\text{Маємо: } S_{ABCD} = LT \cdot NP, \quad NP = \frac{S_{ABCD}}{LT} = \frac{63}{5} \text{ см.}$$

$$\text{Тоді } NK = \frac{1}{2} \cdot \frac{63}{5} = 6,3 \text{ (см).}$$

Відповідь. 6,3.

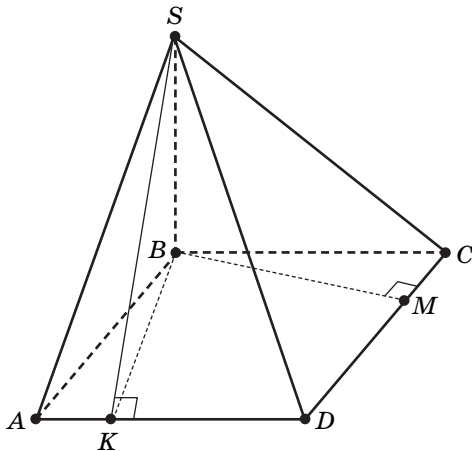
Задача 8 (ЗНО 2013, 2 сесія)

Основою піраміди є ромб, тупий кут якого дорівнює 120° . Дві бічні грані піраміди, що містять сторони цього кута, перпендикулярні до площини основи, а дві інші бічні грані нахилені до площини основи під кутом 30° . Знайдіть площу бічної поверхні піраміди (у см^2), якщо її висота дорівнює 4 см.

Розв'язання

На рисунку зображена піраміда $SABCD$, в основі якої лежить ромб $ABCD$, у якому $\angle B = 120^\circ$.

За умовою $(SAB) \perp (ABC)$, $(SBC) \perp (ABC)$.



Оскільки дві суміжні бічні грані піраміди перпендикулярні до площини основи, то спільне ребро цих граней є висотою піраміди, тобто SB — висота піраміди, $SB = 4$ см. Проведемо $BK \perp AD$, $BM \perp CD$. Тоді за теоремою про три перпендикуляри $SK \perp AD$, $SM \perp CD$. Отже, за означенням лінійного кута двогранного кута $\angle SKB = \angle SMB = 30^\circ$.

Із прямокутного трикутника SBK маємо:

$$BK = SB \operatorname{ctg} SKB = 4 \operatorname{ctg} 30^\circ = 4\sqrt{3} \text{ (см),}$$

$$SK = \frac{SB}{\sin SKB} = \frac{4}{\sin 30^\circ} = 4 \cdot 2 = 8 \text{ (см).}$$

Знайдемо гострий кут ромба: $\angle BAD = 180^\circ - 120^\circ = 60^\circ$. Із прямокутного трикутника ABK :

$$AB = \frac{BK}{\sin BAK} = \frac{4\sqrt{3}}{\sin 60^\circ} = 4\sqrt{3} \cdot \frac{2}{\sqrt{3}} = 8 \text{ (см).}$$

Очевидно, що $\triangle SAB = \triangle SCB$ (за двома катетами) і $\triangle SAD = \triangle SCD$ (за трьома сторонами).

Тоді

$$\begin{aligned} S_{\text{бічн.}} &= 2S_{SAB} + 2S_{SAD} = 2 \cdot \frac{1}{2} AB \cdot SB + 2 \cdot \frac{1}{2} SK \cdot AD = \\ &= AB(SB + SK) = 8 \cdot (4 + 8) = 96 \text{ (см}^2\text{)}. \end{aligned}$$

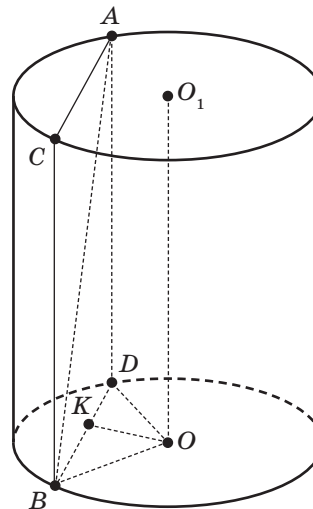
Відповідь. 96.

Задача 9 (ЗНО 2014)

Через точки A і B , що лежать на колах верхньої та нижньої основ циліндра і не належать одній твірній, проведено площину паралельно осі циліндра. Відстань від центра нижньої основи до цієї площини дорівнює 2 см, а площа утвореного перерізу — $60\sqrt{2} \text{ см}^2$. Визначте довжину відрізка AB (у см), якщо площа бічної поверхні циліндра дорівнює $20\sqrt{30}\pi \text{ см}^2$.

Розв'язання

На рисунку зображений циліндр із віссю OO_1 .



Побудуємо переріз циліндра площиною, яка проходить через точки A і B , що лежать на колах верхньої та нижньої основ циліндра і не належать одній твірній, паралельно осі OO_1 циліндра.

Для цього проведемо через точку B твірну BC , сполучимо точки A і C . Проведемо твірну AD . За ознакою паралельності прямої та площини $OO_1 \parallel (ABC)$.

Оскільки площина перерізу паралельна осі циліндра, то $ACBD$ — прямокутник. Проведемо $OK \perp BD$, оскільки площина (ABC) перпендикулярна до площини основи циліндра, то за властивістю перпендикулярності двох площин, $OK \perp (ABC)$, тобто OK — відстань від центра нижньої основи до площини перерізу. За умовою $OK = 2$ см. Трикутник BOD — рівнобедрений ($OB = OD$ — як радіуси). Тому OK — висота і медіана цього трикутника, $BD = 2BK$.

Маємо:

$$S_{ACBD} = BD \cdot BC = 2BK \cdot BC = 60\sqrt{2},$$

$$BK \cdot BC = 30\sqrt{2}, \quad BC = \frac{30\sqrt{2}}{BK}.$$

Площу бічної поверхні циліндра обчислимо за формулою $S_{\text{бічн.}} = 2\pi RH$, де R — радіус основи, H — висота циліндра.

$$\text{Маємо: } S_{\text{бічн.}} = 2\pi OB \cdot BC = 20\sqrt{30}\pi.$$

$$\text{Тоді } OB \cdot BC = 10\sqrt{30}, \quad OB \cdot \frac{30\sqrt{2}}{BK} = 10\sqrt{30},$$

$$\text{звідки } \frac{OB}{BK} = \frac{\sqrt{15}}{3}.$$

$$\text{Нехай } BK = x \text{ см, тоді } OB = \frac{\sqrt{15}}{3}x \text{ см.}$$

У прямокутному трикутнику OKB :

$$OK^2 + BK^2 = OB^2, \quad 2^2 + x^2 = \left(\frac{\sqrt{15}}{3}x\right)^2,$$

звідки дістанемо $x = \sqrt{6}$. Тоді $BK = \sqrt{6}$ см,

$$BD = 2\sqrt{6} \text{ см, } BC = \frac{30\sqrt{2}}{\sqrt{6}} = 10\sqrt{3} \text{ (см).}$$

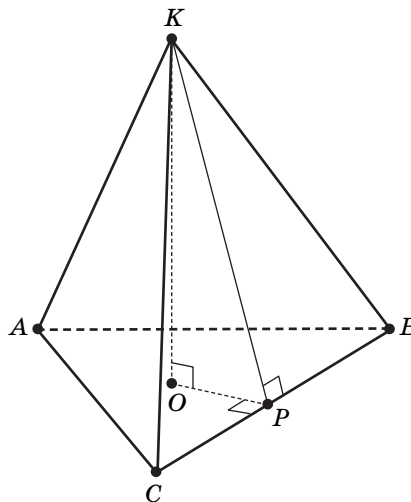
$$\text{Із прямокутного трикутника } ABC: \\ AB = \sqrt{AD^2 + BD^2} = \sqrt{100 \cdot 3 + 4 \cdot 6} = \sqrt{324} = 18 \text{ (см).}$$

Відповідь. 18.

Задача 10 (ЗНО 2015)

Навколо конуса описано трикутну піраміду, площа основи якої дорівнює $50\sqrt{3}$, а периметр основи — 50. Визначте об'єм V цього конуса, якщо довжина його твірної дорівнює 4. У відповіді запишіть значення $\frac{V}{\pi}$.

Розв'язання



На рисунку зображена піраміда $KABC$ з висотою KO , що описана навколо конуса. За умовою $S_{ABC} = 50\sqrt{3}$, $P_{ABC} = 50$. Радіус кола, вписаного в трикутник, обчислимо за формулою $r = \frac{2S}{P}$, де $S = S_{ABC}$, $P = P_{ABC}$.

$$\text{Маємо: } r = \frac{2 \cdot 50\sqrt{3}}{50} = 2\sqrt{3}.$$

Оскільки піраміда описана навколо конуса, то висоти конуса і піраміди збігаються, а висота бічної грані піраміди є твірною конуса.

Проведемо $OP \perp BC$, причому OP — радіус кола, вписаного в основу піраміди, тоді $KP \perp BC$ за теоремою про три перпендикуляри. Отже, KP — висота бічної грані піраміди, тому є твірною конуса. За умовою $KP = 4$. Із прямокутного трикутника KOP :

$$OK = \sqrt{KP^2 - OP^2} = \sqrt{4^2 - (2\sqrt{3})^2} = \sqrt{16 - 12} = 2.$$

Об'єм конуса обчислимо за формулою $V = \frac{1}{3}\pi r^2 H$, де $r = 2\sqrt{3}$, $H = 2$.

$$\frac{V}{\pi} = \frac{1}{3} \cdot (2\sqrt{3})^2 \cdot 2 = 8.$$

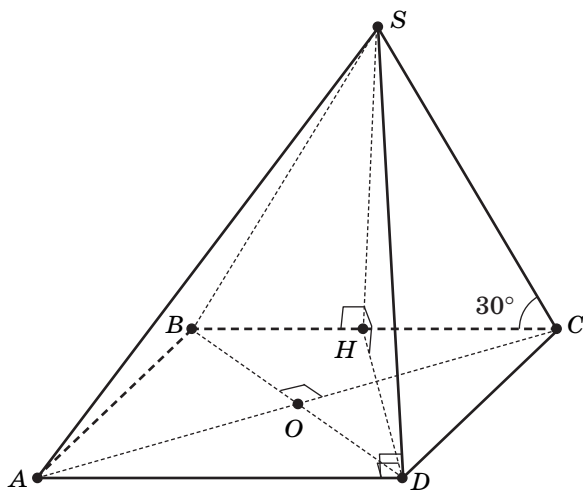
Відповідь. 8.

Задача 11 (ЗНО 2016)

Основою піраміди $SABCD$ є ромб $ABCD$, більша діагональ якого $AC=30$. Грань SBC є рівнобедреним трикутником ($SB=SC$) і перпендикулярна до площини основи піраміди. Ребро SC нахилено до площини основи піраміди під кутом 30° . Визначте кут між площинами (SAD) і (ABC) , якщо висота піраміди дорівнює 5.

Розв'язання

На рисунку зображена піраміда $SABCD$, основа якої — ромб $ABCD$ із більшою діагоналлю $AC=30$.



Проведемо $SH \perp (ABC)$. Оскільки грань SBC перпендикулярна до основи піраміди, то висота SH піраміди належить цій грані. За умовою $SH=5$.

За умовою трикутник SBC — рівнобедрений з основою BC , тоді SH є також і медіаною, проведеною до основи BC трикутника.

SC — похила до площини (ABC) , CH — її проекція на цю площину, тоді за означенням кута між прямою та площиною, $\angle SCH$ — кут між ребром SC і площиною основи. За умовою $\angle SCH=30^\circ$.

Із прямокутного трикутника SCH : $HC = SH \operatorname{ctg} \angle SCH = 5 \operatorname{ctg} 30^\circ = 5\sqrt{3}$.

Сторона ромба $BC = 2CH = 2 \cdot 5\sqrt{3} = 10\sqrt{3}$.

У прямокутному трикутнику BOC : $\angle BOC=90^\circ$, $OC=15$ (за властивостями діагоналей ромба),

$$BO = \sqrt{BC^2 - OC^2} = \sqrt{(10\sqrt{3})^2 - 15^2} = \sqrt{75} = 5\sqrt{3}.$$

Тоді $BD=10\sqrt{3}$ і трикутник BCD — рівносторонній. Отже, $\angle BCD=60^\circ$, $\angle ADC=120^\circ$.

DH — медіана рівностороннього трикутника, отже, і висота.

Із прямокутного трикутника HDC : $\angle HDC=90^\circ - 60^\circ = 30^\circ$.

Тоді

$$\angle ADH = \angle ADC - \angle HDC = 120^\circ - 30^\circ = 90^\circ.$$

Тобто $HD \perp AD$, причому HD — проекція SD на площину основи піраміди.

Тоді $SD \perp AD$ за теоремою про три перпендикуляри.

Отже, $\angle SDH$ — лінійний кут двогранного кута при ребрі AD , а оскільки він гострий, то це і є кут між площинами (SAD) і (ABC) . $\angle SDH$ — шуканий кут.

Із прямокутного трикутника HDC :

$$HD = CD \sin 60^\circ = 10\sqrt{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 15.$$

Із прямокутного трикутника SDH :

$$\operatorname{tg} \angle SDH = \frac{SH}{HD} = \frac{5}{15} = \frac{1}{3}.$$

$$\angle SDH = \operatorname{arctg} \frac{1}{3}.$$

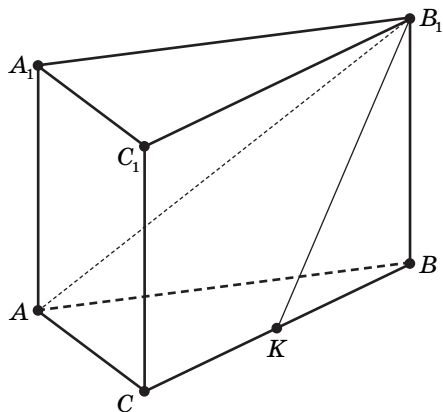
Відповідь. $\operatorname{arctg} \frac{1}{3}$.

Задача 12 (ЗНО 2017)

Основою правильної призми $ABCA_1B_1C_1$ є рівносторонній трикутник ABC . Точка K — середина ребра BC . Площина, що проходить через точки A , K і B_1 , утворює з площиною основи призми кут α . Визначте об'єм призми $ABCA_1B_1C_1$, якщо відстань від вершини A до грані BB_1C_1C дорівнює d .

Розв'язання

На рисунку зображена правильна призма $ABCA_1B_1C_1$, основою якої є рівносторонній трикутник ABC . Точка K — середина ребра BC , тоді AK — медіана, а отже, і висота рівностороннього трикутника ABC , тобто $BK \perp AK$.



BK — проекція похилої B_1K на площину (ABC) , тоді за теоремою про три перпендикуляри $B_1K \perp AK$. За означенням лінійного кута двогранного кута $\angle B_1KB$ — лінійний кут двогранного кута при ребрі AK . За умовою $\angle B_1KB = \alpha$.

За умовою призма правильна, тому $(ABC) \perp (BCC_1)$. Оскільки $AK \perp BC$, то за властивістю перпендикулярних площин

$AK \perp (BCC_1)$, тоді AK — відстань від точки A до площини (BCC_1) . За умовою $AK = d$.

Об'єм призми обчислимо за формулою $V = SH$, де $S = S_{ABC}$, $H = BB_1$.

Із прямокутного трикутника AKB маємо:

$$KB = AK \operatorname{tg} BAK = d \operatorname{tg} 30^\circ = \frac{\sqrt{3}d}{3}.$$

Отже, сторона трикутника дорівнює $\frac{2\sqrt{3}d}{3}$.

$$S_{ABC} = \frac{\left(\frac{2\sqrt{3}d}{3}\right)^2 \sqrt{3}}{4} = \frac{d^2 \sqrt{3}}{3}.$$

Із прямокутного трикутника KB_1B маємо:

$$BB_1 = KB \operatorname{tg} B_1KB = \frac{\sqrt{3}d}{3} \operatorname{tg} \alpha.$$

$$V = \frac{d^2 \sqrt{3}}{3} \cdot \frac{\sqrt{3}d}{3} \operatorname{tg} \alpha = \frac{1}{3} d^3 \operatorname{tg} \alpha.$$

$$\text{Відповідь. } \frac{1}{3} d^3 \operatorname{tg} \alpha.$$

Як саме вам утілити в реальність НУШ: докладний посібник для вчителів!



«Звичайні форми роботи – новий підхід: розвиваємо ключові компетентності»

Код: 20НФМ004 Ціна 85,00

укр. мова, формат А4, м'яка обкладинка

Посібник містить найактуальніші для вчителів матеріали:

- як реалізувати вимоги нової української школи;
- як формувати компетентності на прикладі різних типів уроків;
- приклади уроків і методи роботи для початкової, середньої та старшої школи.

Матеріали викладені простою та зрозумілою мовою. Приклади уроків розроблені з урахуванням новітніх інтерактивних методів і візуальних засобів навчання, якими ви зможете скористатися у роботі.

Якщо ви – вчитель-предметник ЗНЗ, викладач коледжу чи технікуму або навіть студент педагогічного вишу – цей посібник для вас!

* Незабаром у продажу.

Замовляйте посібник за найнижчою ціною!

Замовлення можна зробити:

на сайті <http://book.osnova.com.ua>;

або за тел.: 0-800-505-212;

Вартість поштової доставки Укрпоштою – 16,00 грн.

Тарифи інших перевізників дізнавайтеся додатково.

ОСНОВА